ETH-AUFNAHMEPRÜFUNG 2018

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl P gemäss der Formel N = P /9 +1,
wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Mathematik II (Geometrie / Statistik)

Aufgabe 1 [9 Punkte]

Gegeben seien die Punkte A(1/8/0), B(6/6/5) und C(0/12/–1).

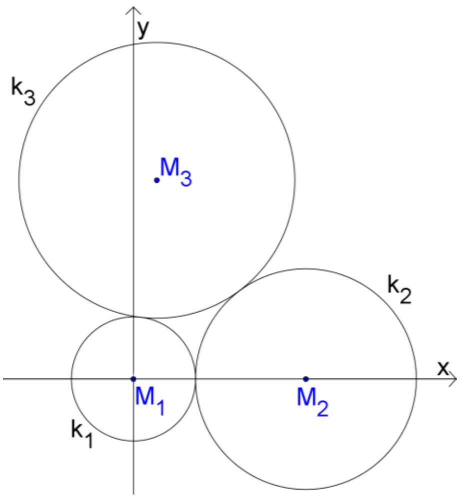
a) Bestimmen Sie den Punkt $E \in AC$ so, dass das Dreieck ABE gleichschenklig mit Basis AE wird. — 3 Punkte

b) Berechnen Sie in der xy-Ebene den Punkt F mit der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABF auf der Geraden AC zu liegen kommt. — 3 Punkte

c) Bestimmen Sie den Punkt $G \in AB$ so, dass das Dreieck ACG den Flächeninhalt $18\sqrt{2}$ besitzt. — 3 Punkte

Aufgabe 2 [13 Punkte]

Gegeben seien die Kreise k_1: $x^2 + y^2 = 2025$, k_2: $(x-125)^2 + y^2 = 6400$ und
k_3: $(x-17)^2 + (y-144)^2 = 10000$.



a) Die drei Kreise berühren sich gegenseitig von aussen.
Zeigen Sie dies im Falle von k_2 und k_3. — 3 Punkte

b) Bestimmen Sie sowohl den Berührungspunkt von k_2 und k_3 als auch eine Gleichung der gemeinsamen Tangente. — 4 Punkte

c) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die durch die drei Kreise begrenzt wird. — 6 Punkte

BITTE WENDEN

Aufgabe 3 [17 Punkte]

Es werden gleichzeitig ein Würfel und drei Oktaeder, deren Flächen je mit den Zahlen 1 bis 8 versehen sind, geworfen. Es bezeichne W die mit dem Würfel erzielte Augenzahl und S die Summe der mit den Oktaedern erzielten Augenzahlen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von S. — 2 Punkte

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass W und S beide den Wert 5 annehmen. — 2 Punkte

c) Bestimmen Sie, wie oft mindestens geworfen werden muss, damit S den Maximalwert mit einer Sicherheit von 95% annimmt. — 3 Punkte

d) Wissend, dass die Summe aller vier Augenzahlen 10 beträgt, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $W = S$. — 4 Punkte

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass W ungerade und S durch W teilbar ist. — 6 Punkte

Aufgabe 4 [11 Punkte]

Gegeben seien die Ebene ε: $5x + 2y + 14z - 529 = 0$ und die Gerade $m = M(-2/17/20)N(0/19/19)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichungen der Ebenen, welche parallel zu ε sind und den Abstand 15 von ε aufweisen. — 2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass die Gerade m parallel zur Ebene ε verläuft. — 2 Punkte

c) Bestimmen Sie alle Ecken einer geraden quadratischen Pyramide ABCD'E, welche folgende Bedingungen erfüllt: — 7 Punkte
   - M ist der Mittelpunkt des Quadrates ABCD.
   - A und C liegen auf m.
   - E liegt in ε.
   - die Pyramide besitzt das Volumen $V = 9000$.

VIEL ERFOLG !

Aufgabe 1 [9 Punkte]

Gegeben seien die Punkte A(1/8/0), B(6/6/5) und C(0/12/–1).

a) Bestimmen Sie den Punkt E∈AC so, dass das Dreieck ABE gleichschenklig mit Basis AE wird. 3 Punkte

b) Berechnen Sie in der xy-Ebene den Punkt F mit der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt des Dreiecks ABF auf der Geraden AC zu liegen kommt. 3 Punkte

c) Bestimmen Sie den Punkt G∈AB so, dass das Dreieck ACG den Flächeninhalt $18\sqrt{2}$ besitzt. 3 Punkte

a) $AC: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(1+\lambda/8-4\lambda/\lambda)$ 1 Punkt

$\overline{AB}^2 = 5^2 + (-2)^2 + 5^2 \stackrel{!}{=} (-5+\lambda)^2 + (2-4\lambda)^2 + (-5+\lambda)^2$ 1 Punkt

$\Rightarrow \quad 54 = 18\lambda^2 - 36\lambda + 54 \quad \Rightarrow \quad 18\lambda^2 - 36\lambda = 18\lambda(\lambda-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$ (d.h. E = A), $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E(3/0/2)}}$ 1 Punkt

b) $F(x/y/0) \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{x+7}{3} / \frac{y+14}{3} / \frac{5}{3}\right) \stackrel{!}{=} (1+\lambda/8-4\lambda/\lambda)$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 1,\ y = -10 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F(1/-10/0)}}$

c) $AB: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(1+5\lambda/8-2\lambda/5\lambda)$ 1 Punkt

$A(ACG) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AG}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5\lambda \\ -2\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}\right| = \frac{|\lambda|}{2}\left|\begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}\right| = 9\sqrt{2} \cdot |\lambda| \stackrel{!}{=} 18\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2$

$\underline{\underline{G_1(11/4/10)}}, \quad \underline{\underline{G_2(-9/12/-10)}}$

Aufgabe 2 [13 Punkte]

Gegeben seien die Kreise k_1: $x^2 + y^2 = 2025$, k_2: $(x-125)^2 + y^2 = 6400$ und
k_3: $(x-17)^2 + (y-144)^2 = 10000$.

a) Die drei Kreise berühren sich gegenseitig von aussen. Zeigen Sie dies im Falle von k_2 und k_3. — 3 Punkte

b) Bestimmen Sie sowohl den Berührungspunkt von k_2 und k_3 als auch eine Gleichung der gemeinsamen Tangente. — 4 Punkte

c) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die durch die drei Kreise begrenzt wird. — 6 Punkte

a) $M_2(125/0)$, $M_3(17/144)$, $r_2 = 80$, $r_3 = 100$

$$\overline{M_2M_3} = \sqrt{(17-125)^2 + (144-0)^2} = \sqrt{108^2 + 144^2} = 36\sqrt{3^2 + 4^2} = 180 = 80 + 100 = r_2 + r_3$$

b) $k_2 \cap k_3$: $\left| \begin{array}{l} (x-125)^2 + \quad y^2 \quad = 6400 \\ (x-\ \ 17)^2 + (y-144)^2 = 10000 \end{array} \right|$

II – I: $216x - 288y = -1800 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t: y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}}$

$t \cap k_2$: $(x-125)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\right)^2 = 6400 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 - 4000x + 250000 + 9x^2 + 150x + 625 = 102400$

$25x^2 - 3850x + 148225 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 154x + 5929 = (x-77)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 77 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B(77/64)}}$

c) $c = \overline{M_1M_2} = r_1 + r_2 = 125$, $a = \overline{M_2M_3} = r_2 + r_3 = 180$, $b = \overline{M_1M_3} = r_1 + r_3 = 145$

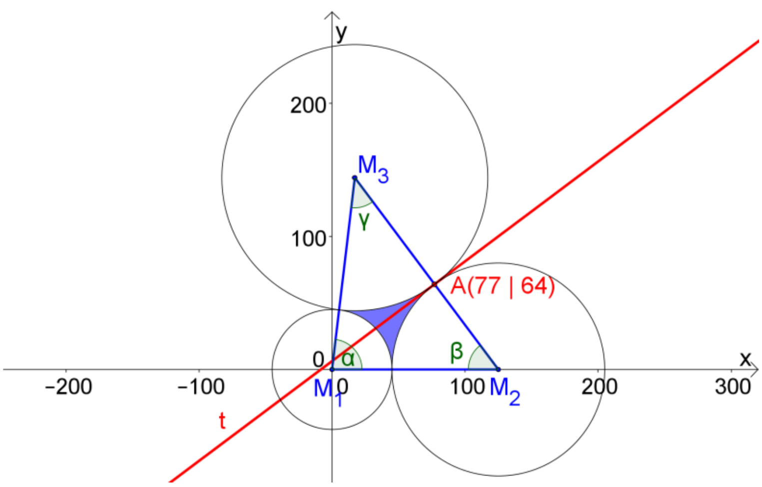
$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = 83.27°$, $\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = 53.13°$, $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 43.60°$

$A_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot y_3 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 144 = 9000$

$A_1 = \frac{\alpha}{360°}\pi \cdot r_1^2 = 1471.45$, $A_2 = \frac{\beta}{360°}\pi \cdot r_2^2 = 2967.34$, $A_3 = \frac{\gamma}{360°}\pi \cdot r_3^2 = 3805.06$

$A = A_\Delta - A_1 - A_2 - A_3 = \underline{\underline{756.14 = A}}$

Alle drei Seiten des Dreiecks korrekt: 1 Punkt
Alle drei Winkel des Dreiecks korrekt: 1 Punkt
Dreiecksfläche korrekt: 1 Punkt
Alle drei Sektorflächen korrekt: 1 Punkt



Aufgabe 3 [17 Punkte]

Es werden gleichzeitig ein Würfel und drei Oktaeder, deren Flächen je mit den Zahlen 1 bis 8 versehen sind, geworfen. Es bezeichne W die mit dem Würfel erzielte Augenzahl und S die Summe der mit den Oktaedern erzielten Augenzahlen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von S. — 2 Punkte

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass W und S beide den Wert 5 annehmen. — 2 Punkte

c) Bestimmen Sie, wie oft mindestens geworfen werden muss, damit S den Maximalwert mit einer Sicherheit von 95% annimmt. — 3 Punkte

d) Wissend, dass die Summe aller vier Augenzahlen 10 beträgt, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass W = S. — 4 Punkte

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass W ungerade und S durch W teilbar ist. — 6 Punkte

a) $E(O_1) = E(O_2) = E(O_3) = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad E(S) = \frac{27}{2}$

b) $P(W{=}S{=}5) = P(5 \wedge (1,1,3)) + P(5 \wedge (1,2,2)) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot (3+3) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512} \approx 0.001953$

c) $P(S{=}24) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$; $P(\text{mindestens einmal } S{=}24) = 1 - P(\text{nie } S{=}24) = 1 - \left(\frac{511}{512}\right)^n \overset{!}{\geq} 0.95$

$\Rightarrow \quad 0.05 \geq \left(\frac{511}{512}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \ln(0.05) \geq n \cdot \ln\left(\frac{511}{512}\right) \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(511/512\right)} = 1532.3 \quad \Rightarrow \quad n \geq 1533$

d) $10 = 1{+}1{+}1{+}7 = 1{+}1{+}2{+}6 = 1{+}1{+}3{+}5 = 1{+}1{+}4{+}4 = 1{+}2{+}2{+}5 = 1{+}2{+}3{+}4 = 1{+}3{+}3{+}3$
$= 2{+}1{+}1{+}6 = 2{+}1{+}2{+}5 = 2{+}1{+}3{+}4 = 2{+}2{+}2{+}4 = 2{+}2{+}3{+}3$
$= 3{+}1{+}1{+}5 = 3{+}1{+}2{+}4 = 3{+}1{+}3{+}3 = 3{+}2{+}2{+}3$
$= 4{+}1{+}1{+}4 = 4{+}1{+}2{+}3 = 4{+}2{+}2{+}2 = 5{+}1{+}1{+}3 = 5{+}1{+}2{+}2 = 6{+}1{+}1{+}2$

$\Rightarrow \quad P(W{=}S \,/\, W{+}S{=}10) = \frac{6}{28+21+15+10+6+3} = \frac{6}{83} \approx 0.07229$

e) W = 1: S ist immer durch W teilbar
W = 3: $S \in \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$
W = 5: $S \in \{5,10,15,20\}$

S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12	S=13
1	3	6	10	15	21	28	36	42	46	48
S=24	S=23	S=22	S=21	S=20	S=19	S=18	S=17	S=16	S=15	S=14

5 = 1+1+3 = 1+2+2
6 = 1+1+4 = 1+2+3 = 2+2+2
7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3
8 = 1+1+6 = 1+2+5 = 1+3+4 = 2+2+4 = 2+3+3
9 = 1+1+7 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3
10 = 1+1+8 = 1+2+7 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4
11 = 1+2+8 = 1+3+7 = 1+4+6 = 1+5+5 = 2+2+7 = 2+3+6 = 2+4+5 = 3+3+5 = 3+4+4
12 = 1+3+8 = 1+4+7 = 1+5+6 = 2+2+8 = 2+3+7 = 2+4+6 = 2+5+5 = 3+3+6 = 3+4+5 = 4+4+4
13 = 1+4+8 = 1+5+7 = 1+6+6 = 2+3+8 = 2+4+7 = 2+5+6 = 3+3+7 = 3+4+6 = 3+5+5 = 4+4+5

$\Rightarrow \quad P(\text{S ist durch W teilbar und W ungerade}) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{170}{512} + \frac{103}{512}\right) = \frac{785}{3072} \approx 0.2555$

Aufgabe 4 [11 Punkte]

Gegeben seien die Ebene ε: $5x + 2y + 14z - 529 = 0$ und die Gerade $m = M(-2/17/20)N(0/19/19)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichungen der Ebenen, welche parallel zu ε sind und den Abstand 15 von ε aufweisen. 2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass die Gerade m parallel zur Ebene ε verläuft. 2 Punkte

c) Bestimmen Sie alle Ecken einer geraden quadratischen Pyramide ABCDE, welche folgende Bedingungen erfüllt: 7 Punkte
- M ist der Mittelpunkt des Quadrates ABCD.
- A und C liegen auf m.
- E liegt in ε.
- die Pyramide besitzt das Volumen V = 2250.

a) $d(O,\varepsilon) = \dfrac{-529}{15} \;\Rightarrow\; d(O,\varepsilon_{1,2}) = \dfrac{d}{15} \overset{!}{=} -\dfrac{529}{15} \pm 15 \;\Rightarrow\; d = -529 \pm 225$

$\Rightarrow\; d_1 = -304,\ d_2 = -754 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\varepsilon_1 : 5x+2y+14z-304=0}},\ \underline{\underline{\varepsilon_2 : 5x+2y+14z-754=0}}$

b) m: $\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$m \cap \varepsilon$: $5(-2+2\lambda) + 2(17+2\lambda) + 14(20-\lambda) - 529 = 0 \;\Rightarrow\; -225 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{m \parallel \varepsilon}}$

c) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \begin{pmatrix}5\\2\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\19\\34\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{E(3/19/34)}}$ 1 Punkt

$V = \dfrac{1}{3}s^2h \;\Rightarrow\; s = \sqrt{\dfrac{3V}{h}} = \sqrt{\dfrac{6750}{15}} = \sqrt{450} = \underline{15\sqrt{2} = s} \;\Rightarrow\; \overline{AM} = 15$ 1 Punkt

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + 5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\27\\15\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{A(8/27/15)}}$ 1 Punkt

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} - 5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\7\\25\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C(-12/7/25)}}$ 1 Punkt

$\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\2\\14\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix}$ 1 Punkt

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\18\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{B(8/6/18)}}$ 1 Punkt

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\17\\20\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\\22\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D(-12/28/22)}}$ 1 Punkt